

SISTEMI LINEARI

Definizione

Un **sistema lineare** è un insieme di **m equazioni lineari** in **n incognite** a coefficienti in un campo k . Si parlerà di sistema lineare $m \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

con $a_{ij}, b_h \in k$. Gli a_{ij} vengono detti **coefficienti delle incognite** e i b_h **termini noti**.

x_1, \dots, x_n sono le n incognite.

Si considerano le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in k^{m,n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^{n,1},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \in k^{m,1}, \quad \text{e } A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \in k^{m,n+1}$$

La matrice A è detta **matrice dei coefficienti** o **matrice incompleta**, B **matrice (o colonna) dei termini noti**, X **matrice o colonna delle incognite** e $A|B$ **matrice completa**.

Osserviamo che il sistema lineare si può scrivere nella forma $AX = B$.

Definizione

Sia $AX = B$ un sistema lineare di tipo $m \times n$. Diremo **soluzione del sistema lineare** un elemento $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in k^n$ tale che, posto:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

si abbia $A \cdot \alpha = B$, cioè sostituendo α_i ad ogni x_i per $i = 1, \dots, n$ vengono soddisfatte tutte le equazioni.

Definizione

Un sistema lineare si dice **impossibile** se non ammette alcuna soluzione, **possibile** se ammette almeno una soluzione.

Quando il sistema ammette un'unica soluzione è detto **determinato** e, quando ne ammette più di una, è detto **indeterminato**.

Condizioni di risolubilità di un sistema lineare

Un risultato fondamentale nella teoria dei sistemi lineari è il **Teorema di Rouchè - Capelli** che descrive le condizioni di risolubilità di un sistema lineare, ma non fornisce un metodo per trovarne le soluzioni.

Teorema di Rouchè-Capelli I

Un sistema lineare $AX = B$ di tipo $m \times n$ è possibile $\iff \rho(A) = \rho(A|B)$.

(DIMOSTRAZIONE NELLE PROSSIME LEZIONI)

Quindi se il rango di A è minore del rango di $A|B$, allora il sistema è *incompatibile*.

Nel caso di uguaglianza il sistema è compatibile, ovvero può essere *determinato* oppure *indeterminato*.

Definizione

Sia $AX = B$ un sistema lineare nelle n incognite x_1, \dots, x_n .

r incognite x_{i_1}, \dots, x_{i_r} si dicono **libere** se possono assumere valori arbitrari (cioè liberi) in funzione dei quali sono determinati i valori delle incognite del sistema x_1, \dots, x_n .

Teorema di Rouchè-Capelli II

Sia $AX = B$ sistema lineare di tipo $m \times n$ e sia $\rho(A) = \rho(A|B) = r$. Allora il sistema ha $n - r$ incognite libere e diciamo che il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni (ovvero il sistema è indeterminato con $n-r$ incognite libere).

Quindi se:

- $r = n$ il sistema è determinato (non ci sono incognite libere)
- $r < n$ il sistema è indeterminato con $n-r$ incognite libere.

Sistemi omogenei

Definizione

Se:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora il sistema lineare $AX = B$ è detto **omogeneo**.

Banalmente in questo caso si ha $\rho(A) = \rho(A|B)$ e il sistema ammette sempre una soluzione, che è $(0, 0, \dots, 0)$. Questa è detta **soluzione banale**.

Proprietà

Un sistema lineare omogeneo $AX = 0$ di tipo $m \times n$ ha soluzioni non banali $\Leftrightarrow \rho(A) < n$.

Sia r il rango di A allora si ha:

- 1) Se $r < n$ il sistema ammette infinite soluzioni con $n-r$ incognite libere.
- 2) Se $r = n$ allora il sistema ammette solo la soluzione banale.

Risoluzione di sistemi lineari con il metodo di riduzione

Due sistemi lineari $AX = B$ e $A'X = B'$ in n incognite si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Metodo di riduzione

Sia $AX = B$ un sistema lineare $m \times n$. Riducendo per righe la matrice completa $A|B$, in modo che gli elementi speciali compaiano in A , otteniamo un sistema lineare $A'X = B'$ equivalente a quello di partenza, ma con la matrice A' ridotta. A questo punto risolvere il sistema lineare $A'X = B'$ è semplice: si procede per sostituzione dal basso verso l'alto, ricavando di volta in volta l'incognita corrispondente all'elemento speciale.

Risoluzione di sistemi lineari con il metodo di Cramer

Teorema di Cramer

Un sistema lineare $AX = B$ di tipo $n \times n$ è determinato $\iff |A| \neq 0$. In tal caso, considerate le matrici:

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \dots$$

$$B_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

la soluzione del sistema è:

$$\left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}, \dots, \frac{|B_n|}{|A|} \right).$$

DIMOSTRAZIONE.

Per ipotesi sia $AX = B$ un sistema lineare di tipo $n \times n$ determinato, proviamo che $|A|$ sia diverso da 0.

Essendo il sistema determinato per il teorema di Rouchè-Capelli si ha che $r(A) = r(A|B) = n$. Pertanto, essendo il rango massimo, per definizione di rango il più grande minore non nullo è proprio $|A|$. Segue che $|A|$ è diverso da 0.

VICEVERSA. Supponiamo per ipotesi che $|A|$ è diverso da 0 e proviamo che il sistema sia determinato, ovvero che ammette un'unica soluzione. Essendo $|A|$ non nullo, allora la matrice A è invertibile quindi esiste A^{-1} in $k^{n,n}$. Moltiplichiamo a sinistra per A^{-1} ambo i membri di $AX=B$ ottenendo:

$$\begin{aligned}A^{-1} \cdot AX &= A^{-1} \cdot B \\(A^{-1} \cdot A)X &= A^{-1} \cdot B\end{aligned}$$

Essendo $A^{-1} \cdot A = I$, si ottiene: $X = A^{-1} \cdot B$, che è la *soluzione del sistema*. Inoltre, essendo per ipotesi $|A|$ non nullo, segue che $r(A)=n$, quindi per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema è determinato.

Abbiamo così provato che la soluzione del sistema è la n -upla $X=(x_1, \dots, x_n)$ ottenuta moltiplicando le matrici A^{-1} e B . Calcoliamo adesso x_1, \dots, x_n , ricordando che $A^{-1} = (1/|A|) {}^tA_a$.

$$\begin{aligned}
 X &= A^{-1} \cdot B = (1/|A|) {}^tA_a \cdot B = 1/|A| \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \\
 &= 1/|A| \begin{pmatrix} A_{11} b_1 + A_{21} b_2 + \dots + A_{n1} b_n \\ A_{12} b_1 + A_{22} b_2 + \dots + A_{n2} b_n \\ \dots \\ A_{1n} b_1 + A_{2n} b_2 + \dots + A_{nn} b_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = 1/|A| \begin{pmatrix} A_{11} b_1 + A_{21} b_2 + \dots + A_{n1} b_n \\ A_{12} b_1 + A_{22} b_2 + \dots + A_{n2} b_n \\ \dots \\ A_{1n} b_1 + A_{2n} b_2 + \dots + A_{nn} b_n \end{pmatrix}$$

Allora per ogni $i=1, \dots, n$ si ha:

$$x_i = (1/|A|) (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni})$$

Si osserva che per primo teorema di Laplace applicato alla i -esima colonna si ha:

$$(b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \begin{array}{c} i\text{-esima colonna di } B_i \\ | \end{array} & & & \\ a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} & \\ & & \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} & \end{array} \\ \end{array} = |B_i|$$

essendo $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}$ i complementi algebrici degli elementi della i -esima colonna della matrice B_i per ogni $i=1, \dots, n$. Quindi

$$x_i = 1/|A| (|B_i|) = \frac{|B_i|}{|A|} \text{ per ogni } i=1, \dots, n.$$

Si conclude che il sistema ammette come unica soluzione:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{|B_1|}{|A|}, \frac{|B_2|}{|A|}, \dots, \frac{|B_n|}{|A|} \right).$$