



---

## 9798435 - ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA A - Z

Docente: MONICA LA BARBIERA

---

### Risultati di apprendimento attesi

- 1. Conoscenza e capacità di comprensione (knowledge and understanding):** definizioni e teoremi riguardanti i concetti fondamentali degli spazi vettoriali, applicazioni lineari ed endomorfismi, costruzioni di base e teoremi riguardanti rette e piani nello spazio e le coniche nel piano, definizioni e teoremi inerenti la classificazione delle quadriche.
- 2. Capacità di applicare conoscenza e comprensione (applying knowledge and understanding):** saper calcolare il rango di una matrice, con o senza parametro, sapere studiare uno spazio vettoriale, sapere fare lo studio di un'applicazione lineare, saper determinare autovalori e autovettori di endomorfismi, sapere fare la diagonalizzazione di una matrice, essere in grado di risolvere problemi di geometria lineare inerenti punti, rette e piani nello spazio, sapere classificare le coniche e le quadriche e studiare i fasci di coniche nel piano.
- 3. Autonomia di giudizio (making judgements):** Lo studente sarà stimolato ad approfondire autonomamente le proprie conoscenze e a svolgere esercizi sugli argomenti trattati e alla fine del corso sarà in grado di elaborare autonomamente soluzioni ai principali problemi oggetto del corso scegliendo la strategia più conveniente sulla base dei risultati appresi. Sarà, inoltre, fortemente consigliato il confronto costruttivo fra studenti e il confronto costante con il docente in modo che lo studente possa monitorare criticamente il proprio processo di apprendimento.
- 4. Abilità comunicative (communication skills):** La frequenza delle lezioni e la lettura dei libri consigliati aiuteranno lo studente a familiarizzare con il rigore del linguaggio matematico e ad acquisire il linguaggio specifico dell'algebra lineare e della geometria. Attraverso la costante interazione con il docente, lo studente imparerà a comunicare con rigore e chiarezza le conoscenze acquisite, sia in forma orale che scritta. Alla fine del corso lo studente avrà imparato che il linguaggio matematico è utile per comunicare con chiarezza in ambito scientifico.

**5. Capacità di apprendimento (learning skills):** Il corso si propone, come obiettivo, di fornire allo studente il metodo di studio, la forma mentis e il rigore logico che gli saranno necessari nel prosieguo degli studi. In particolare, attraverso opportune esercitazioni guidate sarà in grado di affrontare autonomamente nuovi argomenti riconoscendo i prerequisiti necessari per la loro comprensione.

#### **Contributo dell'insegnamento agli obiettivi dell'Agenda 2030 per lo Sviluppo Sostenibile**

GOAL 4: Istruzione di qualità. *Fornire un'educazione di qualità, equa e inclusiva, promuovere opportunità di apprendimento permanente per tutti.*

### **Modalità di svolgimento dell'insegnamento**

Durante le lezioni frontali verranno proposti gli argomenti dal punto di vista formale, corredati da esempi significativi e applicazioni, e numerosi esercizi. Sono previste delle ore di esercitazione, al di fuori dell'orario delle lezioni, svolte da un tutor qualificato. Gli studenti saranno invitati a svolgere autonomamente esercizi scelti, anche durante le ore di lezione.

Qualora l'insegnamento venisse impartito in modalità mista o a distanza potranno essere introdotte le necessarie variazioni rispetto a quanto dichiarato in precedenza, al fine di rispettare il programma previsto e riportato nel syllabus.

### **Prerequisiti richiesti**

Risoluzione di equazioni e disequazioni di grado minore o uguale a 3. Fattorizzazione di polinomi. Funzioni goniometriche seno, coseno e tangente. Radice quadrata e valore assoluto di un numero reali. Logica elementare e teoria elementare degli insiemi.

### **Frequenza lezioni**

Lo studente è tenuto a frequentare almeno il 70% delle lezioni del corso.

### **Contenuti del corso**

Algebra Lineare:

1. Generalità sugli insiemi, operazioni. Applicazioni tra insiemi, immagine e controimmagine, iniettività, suriettività, applicazioni biettive. Insiemi con operazioni, le principali strutture geometriche: gruppi, anelli, campi.
2. I vettori dello spazio ordinario. Somma di vettori, prodotto di un numero per un vettore. Prodotto scalare, prodotto vettoriale, prodotto misto. Componenti dei vettori ed operazioni mediante componenti.
3. I numeri complessi, operazioni e proprietà. Forma algebrica e forma trigonometrica dei numeri complessi. Formula di Moivre. Radici n-esime dei numeri complessi.

4. Spazi vettoriali e loro proprietà. Esempi. Sottospazi. Intersezione, unione e somma di sottospazi. Indipendenza lineare, relativo criterio. Generatori di uno spazio. Base di uno spazio, metodo degli scarti successivi, completamento ad una base. Lemma di Steinitz\*, dimensione di uno spazio vettoriale. Formula di Grassmann\*. Somme dirette.
5. Generalità sulle matrici. Rango. Matrici ridotte e metodo di riduzione. Matrici elementari. Prodotto di matrici. Sistemi lineari, teorema di Rouché-Capelli. Risoluzione dei sistemi lineari col metodo di riduzione (di Gauss), incognite libere. Inversa di una matrice quadrata. Sistemi omogenei e sottospazio delle soluzioni.
6. Determinanti e loro proprietà. I teoremi di Laplace\*. Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata. Teorema di Binet\*. Teorema di Cramer. Teorema di Kronecker\*.
7. Applicazioni lineari e loro proprietà. Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare. Iniettività, suriettività, isomorfismi. Lo spazio  $L(V,W)$ , suo isomorfismo\* con  $K^{m,n}$ . Studio delle applicazioni lineari. Cambio di base, matrici simili.
8. Autovalori, autovettori ed autospazi di un endomorfismo. Polinomio caratteristico. Dimensione degli autospazi. Indipendenza degli autovettori. Endomorfismi semplici e diagonalizzazione di matrici.

Geometria:

1. Geometria lineare nel piano. Coordinate cartesiane e coordinate omogenee. Rette e loro equazioni. Intersezioni tra rette. Coefficiente angolare. Distanze. Fasci di rette.
2. Geometria lineare nello spazio. Coordinate cartesiane e coordinate omogenee. I piani e loro equazioni. Le rette, loro rappresentazione. Elementi impropri. Proprietà angolari di rette e piani. Distanze. Fasci di piani.
3. Cambiamenti di coordinate nel piano, rotazioni e traslazioni. Coniche e matrici associate, invarianti ortogonali. Equazioni ridotte, riduzione di una conica a forma canonica. Classificazione delle coniche irriducibili. Studio delle coniche in forma canonica. Circonferenze. Rette tangenti. Fasci di coniche e loro uso per determinare coniche particolari.
4. Quadriche nello spazio e matrici associate. Quadriche irriducibili. Vertici e quadriche degeneri. Coni e cilindri, loro sezioni. Equazioni ridotte, riduzione di una quadrica a forma canonica. Classificazione delle quadriche non degeneri. Sezioni di quadriche con rette e piani. Rette e piani tangenti.

Le dimostrazioni dei teoremi contrassegnati con \* si possono omettere.

## Testi di riferimento

1. P. Bonacini, M. G. Cinquegrani, L. Marino. Algebra lineare: esercizi svolti. Cavallotto Edizioni, Catania, 2012.
2. P. Bonacini, M. G. Cinquegrani, L. Marino. Geometria analitica: esercizi svolti. Cavallotto Edizioni, Catania, 2012.
3. S. Giuffrida, A. Ragusa: Corso di Algebra Lineare. Il Cigno Galileo Galilei, Roma, 1998.
4. Lezioni di Geometria. Spazio Libri, Catania, 2000.

## Programmazione del corso

Argomenti	Riferimenti testi
1 Introduzione alla teoria degli insiemi. Introduzione ai campi e spazi vettoriali. Determinante di una matrice. Calcolo del rango e riduzione di una matrice. Risoluzione dei sistemi lineari. Tempo richiesto previsto: 14 ore, 7 di teoria e 7 di esercizi	Testo 3: cap 1,3 - Testo 1: cap. 1
2 Operazioni con le matrici. Tempo richiesto previsto: 2 ore, 1 di teoria e 1 di esercizi	Testo 3: cap 3 - Testo 1: cap. 1
3 Spazi vettoriali. Generatori e insiemi liberi. Sottospazi. Base e componenti rispetto a una base. Dimensione di uno spazio vettoriale. Somma e intersezione di spazi vettoriali. Estrazione di una base da un sistema di generatori e completamento a base di un insieme libero. Tempo richiesto previsto: 14 ore, 6 di teoria e 8 di esercizi	Testo 3: cap. 2 - Testo 1: cap. 2
4 Applicazioni lineari e loro assegnazione. Studio di un'applicazione lineare. Calcolo di immagini e controimmagini. Tempo richiesto previsto: 10 ore, 5 di teoria e 5 di esercizi	Testo 3: cap. 4 - Testo 1: cap. 2
5 Matrici di cambio base e matrici simili. Operazioni con applicazioni lineari. Tempo richiesto previsto: 2 ore, 1 di teoria e 1 di esercizi	Testo 3: cap. 4 - Testo 1: cap. 5
6 Autovalori, autovettori e autospazi. Polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Endomorfismi semplici. Diagonalizzazione di una matrice. Tempo richiesto previsto: 11 ore, 5 di teoria e 6 di esercizi	Testo 3: cap. 5 - Testo 1: cap. 6
7 Applicazioni sotto condizione. Restrizioni ed estensioni di applicazioni lineari. Tempo richiesto previsto: 2 ore, 1 di teoria e 1 di esercizi.	Testo 3: cap. 5 - Testo 1: cap. 7,8
8 Generalità sul calcolo vettoriale. Coordinate cartesiane e coordinate omogenee. Assegnazione di una retta e di un piano e loro equazioni. Punti impropri. Intersezioni. Parallelismo e ortogonalità. Fasci di rette e piani. Distanze. Angoli. Proiezioni ortogonali. Rette bisettrici e piani bisettrici. Simmetrie. Luoghi di rette. Tempo richiesto previsto: 14 ore, 7 di teoria e 7 di esercizi	Testo 4: cap. 1,2,3 - Testo 2: cap. 1

Argomenti	Riferimenti testi
9 Coniche e matrici associate. Cambiamenti di coordinate nel piano, invarianti ortogonali ed equazioni ridotte di una conica. Classificazione delle coniche. Circonferenze. Rette tangenti. Fasci di coniche. Tempo richiesto previsto: 8 ore, 4 di teoria e 4 di esercizi.	Testo 4: cap. 2 - Testo 2: cap. 2
10 Studio completo delle coniche. Coniche sotto condizione. Tempo richiesto previsto: 3 ore, 1 di teoria e 2 di esercizi.	Testo 4: cap. 2 - Testo 2: cap. 2
11 Quadriche e matrici associate. Quadriche irriducibili. Vertici di una quadrica e quadriche degeneri. Conica all'infinito. Coni e cilindri. Equazioni ridotte di una quadrica. Classificazione delle quadriche non degeneri. Tangenza. Coniche sezione di una quadrica. Sfere. Tempo richiesto previsto: 7 ore, 4 di teoria e 3 di esercizi.	Testo 4: cap. 5 - Testo 2: cap. 3

## Verifica dell'apprendimento

### Modalità di verifica dell'apprendimento

La prova d'esame è composta da una prova scritta (la cui durata è di norma massimo 3 ore) e una prova orale obbligatoria, cui si accede dopo aver superato la prova scritta, che avviene se si riporta un voto pari o superiore a 15/30.

L'esito finale dell'esame è derivante da una valutazione complessiva delle due prove, scritta e orale, tramite le quali si esamineranno, tra le altre cose, la comprensione degli argomenti oggetto dell'insegnamento e la relativa proprietà di linguaggio. Condizione necessaria per il superamento dell'esame è l'esposizione compiuta e corretta di definizioni, enunciati ed esempi. La verifica dell'acquisizione dei contenuti verte anche sulle dimostrazioni e sulle costruzioni, laddove previste.

### Criteri di assegnazione del voto

- NON SUPERATO: lo studente dimostra una conoscenza scarsa e frammentaria della materia, manifesta gravi errori di comprensione e non è in grado di esporre in maniera accettabile i contenuti della materia
- 18-21: lo studente dimostra una limitata conoscenza e una basilare comprensione della materia, espone in modo poco chiaro e con poca precisione
- 22-24: lo studente dimostra un'accettabile conoscenza e un'essenziale comprensione della materia, espone in maniera corretta, ma non totalmente strutturata

- 25-27: lo studente dimostra un'ampia conoscenza e una comprensione adeguata della materia, espone in maniera corretta, ma non completa
- 28-29: lo studente dimostra una conoscenza approfondita e una solida comprensione della materia, espone in maniera chiara e strutturata
- 30-30 e lode: lo studente dimostra una conoscenza completa e dettagliata e una comprensione eccellente della materia, espone in maniera chiara e strutturata.

**Note:**

La verifica dell'apprendimento potrà essere effettuata anche per via telematica, qualora le condizioni lo dovessero richiedere. In tal caso, la durata della prova scritta potrebbe essere soggetta a variazione.

A garanzia di pari opportunità e nel rispetto delle leggi vigenti, gli studenti interessati possono chiedere un colloquio personale in modo da programmare eventuali misure compensative e/o dispensative, in base agli obiettivi didattici ed alle specifiche esigenze. E' possibile rivolgersi anche al docente referente CInAP (Centro per l'integrazione Attiva e Partecipata - Servizi per le Disabilità e/o i DSA) del proprio Dipartimento.

**Esempi di domande e/o esercizi frequenti**

Esercizi di Algebra Lineare

1. Studio di un'applicazione lineare al variare del parametro, determinandone nucleo e immagine.
2. Studio della semplicità di un endomorfismo al variare del parametro, determinandone, quando possibile, una base di autovettori.
3. Calcolo della controimmagine di un vettore, risoluzione di un sistema lineare, al variare del parametro, controimmagine di uno spazio vettoriale, immagine di uno spazio vettoriale.
4. Esercizi sugli spazi vettoriali e sulla loro dimensione, su somma diretta, sulle operazioni con le applicazioni lineari, applicazioni lineari indotte, restrizioni ed estensioni.

Esercizi di Geometria

1. Esercizi di geometria lineare nello spazio: parallelismo e perpendicolarità, distanze, proiezioni ortogonali, angoli.
2. Studio di un fascio di coniche, già assegnato oppure da determinare. Studio completo di una conica. Coniche sotto condizione.
3. Studio di quadriche al variare del parametro. Quadriche sotto condizione. Studio di una conica intersezione di una quadrica con un piano.

Per quanto riguarda la prova orale, tutti gli argomenti menzionati nel programma possono essere richiesti in sede d'esame.

---

English version