Esercizio

Sia $R_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'endomorfismo f di $R_3[x]$ definito da:

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx - ax^3$$

1. Determinare una base per il nucleo di f.
2. Determinare una base per l'immagine di f.
3. L'endomorfismo f è un isomorfismo? Giustificare la risposta.

Svolgimento

Per risolvere l'esercizio, è utile rappresentare l'endomorfismo f tramite una matrice associata rispetto a una base scelta per $R_3[x]$. Una base canonica per $R_3[x]$ è $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Calcolo delle immagini degli elementi della base

Applichiamo l'endomorfismo f a ogni elemento della base $\mathcal{B}$:

- $f(1) = f(1 + 0x + 0x^2 + 0x^3) = 1 + 0x - 1x^3 = 1 - x^3$
- $f(x) = f(0 + 1x + 0x^2 + 0x^3) = 0 + 1x - 0x^3 = x$
- $f(x^2) = f(0 + 0x + 1x^2 + 0x^3) = 0 + 0x - 0x^3 = 0$
- $f(x^3) = f(0 + 0x + 0x^2 + 1x^3) = 0 + 0x - 0x^3 = 0$

Ora esprimiamo queste immagini come combinazioni lineari degli elementi della base $\mathcal{B}$, scrivendo i coefficienti in colonna per formare la matrice associata $M(f)$:

- $f(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x^3 \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ colonna 1

- $f(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \implies \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ colonna 2

- $f(x^2) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \implies \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ colonna 3

- $f(x^3) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \implies \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ colonna 4

La matrice associata all'endomorfismo f rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcolo del nucleo Ker(f)

Il nucleo di f è l'insieme dei polinomi $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ tali che $f(p(x)) = 0$. Questo corrisponde alla risoluzione del sistema omogeneo $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema di equazioni è:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -a &= 0 \end{aligned}$$

Da questo sistema si deduce che $a = 0$ e $b = 0$. Le variabili c e d sono libere. Quindi, i polinomi nel nucleo sono della forma $p(x) = 0 + 0x + cx^2 + dx^3 = cx^2 + dx^3$. Possiamo scrivere questo polinomio come combinazione lineare di x^2 e x^3: $c(x^2) + d(x^3)$. I vettori che generano il nucleo sono $\{x^2, x^3\}$. Poiché sono linearmente indipendenti, formano una base per il nucleo. Una base per Ker(f) è $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = [x^2, x^3]$. La dimensione del nucleo è $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

2. Calcolo dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$

L'immagine di f è lo spazio generato dai vettori colonna della matrice A:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Considerando solo i vettori colonna non nulli, l'immagine è generata da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Questi due vettori sono linearmente indipendenti. Convertendoli in polinomi, otteniamo una base per l'immagine.

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ corrisponde al polinomio $1 - x^3$.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ corrisponde al polinomio x.

Una base per $\mathrm{Im}(f)$ è $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}} = [1 - x^3, x]$. La dimensione dell'immagine è $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

3. L'endomorfismo f è un isomorfismo?

Un endomorfismo $f : V \to V$ è un isomorfismo se e solo se è sia iniettivo che suriettivo. Per un endomorfismo su uno spazio di dimensione finita, queste due condizioni sono equivalenti.

- Un endomorfismo è iniettivo se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo, cioè $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Nel nostro caso, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 \neq 0$, quindi f **non è iniettivo**.
- Un endomorfismo è suriettivo se e solo se la sua immagine coincide con l'intero spazio vettoriale, cioè $\mathrm{Im}(f) = R_3[x]$. Nel nostro caso, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \neq \dim(R_3[x]) = 4$, quindi f **non è suriettivo**.

Poiché f non è né iniettivo né suriettivo, **non è un isomorfismo**.

Esercizio

Sia $R_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 2. Si consideri l'endomorfismo f di $R_2[x]$ definito da:

$$f(a + bx + cx^2) = (a + c) + bx + (a + c)x^2$$

1. Calcolare la matrice associata a f rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.
2. Determinare una base per il nucleo di f, $\mathrm{Ker}(f)$, e la sua dimensione.
3. Determinare una base per l'immagine di f, $\mathrm{Im}(f)$, e la sua dimensione.
4. Stabilire se f è un isomorfismo.
5. Calcolare tutti gli autovalori di f e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
6. Stabilire se f è semplice.

Svolgimento

1. Calcolo della matrice associata

Per calcolare la matrice associata all'endomorfismo f rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, applichiamo f a ciascun elemento della base e scriviamo i risultati come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{B}$.

- $f(1) = f(1 + 0x + 0x^2) = (1 + 0) + 0x + (1 + 0)x^2 = 1 + x^2$. In coordinate rispetto a $\mathcal{B}$, questo corrisponde al vettore colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $f(x) = f(0 + 1x + 0x^2) = (0 + 0) + 1x + (0 + 0)x^2 = x$. In coordinate, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(x^2) = f(0 + 0x + 1x^2) = (0 + 1) + 0x + (0 + 1)x^2 = 1 + x^2$. In coordinate, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice associata $M(f) = A$ è formata dalle coordinate dei vettori immagine, disposte in colonna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcolo del nucleo Ker(f)

Il nucleo è l'insieme dei polinomi $p(x) = a + bx + cx^2$ tali che $f(p(x)) = 0$. Questo si traduce nel risolvere il sistema omogeneo $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dove $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema di equazioni è:

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ b &= 0 \\ a + c &= 0 \end{aligned}$$

Le equazioni sono equivalenti a $a = -c$ e $b = 0$. La variabile c è libera. I vettori nel nucleo sono della forma $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base per il nucleo è data dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, che corrisponde al polinomio $-1 + x^2$. Una base per Ker(f) è $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = [-1 + x^2]$. La dimensione del nucleo è $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

3. Calcolo dell'immagine Im(f)

L'immagine è generata dalle colonne linearmente indipendenti della matrice A. Le colonne sono: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notiamo che $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1$. Dunque, solo i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti e generano l'immagine. L'immagine è generata da $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Convertendo in polinomi, otteniamo una base per l'immagine: $\{1 + x^2, x\}$. Una base per Im(f) è $\mathcal{B}_{\text{Im}} = [1 + x^2, x]$. La dimensione dell'immagine è $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

4. Isomorfismo

Un endomorfismo è un isomorfismo se e solo se è sia iniettivo che suriettivo. Per un endomorfismo su uno spazio di dimensione finita, ciò accade se e solo se $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ (f è iniettiva) o, equivalentemente, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(R_2[x]) = 3$ (f è suriettiva). Poiché $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1 \neq 0$ e $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \neq 3$, l'endomorfismo f **non è un isomorfismo**.

5. Autovalori e molteplicità

Per trovare gli autovalori, calcoliamo il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

dove I è la matrice identità 3×3.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Si calcola il determinante con il teorema di Laplace:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 0 + 1\det\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 0] + [0 - (1-\lambda)]$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1]$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)] = (1-\lambda)[(-\lambda)(2-\lambda)] = (1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Gli autovalori sono le radici di $p(\lambda) = 0$:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

Poiché ogni autovalore appare una sola volta, la **molteplicità algebrica** di ciascuno è 1.

$$m_a(0) = 1, \quad m_a(1) = 1, \quad m_a(2) = 1$$

Per la molteplicità geometrica, sappiamo che per ogni autovalore λ, $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$. Poiché tutte le molteplicità algebriche sono 1, anche le molteplicità geometriche devono essere 1.

$$m_g(0) = 1, \quad m_g(1) = 1, \quad m_g(2) = 1$$

6. Semplicità

Un endomorfismo è semplice se e solo se la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica. Nel nostro caso, per ogni autovalore, $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$. Pertanto, l'endomorfismo f **è semplice (quindi A è diagonalizzabile)**.

Esercizio

Sia $\mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}_3[x]$ definito da

$$f\big(a + bx + cx^2 + dx^3\big) = a + bx - a\,x^3.$$

(a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base standard $(1, x, x^2, x^3)$ di $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Calcolare la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$ e una sua base.

(c) Stabilire se il polinomio $g(x) = -3 + 2x + 3x^3$ è un autovettore di f.

(d) Calcolare tutti gli autovalori di f e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

(e) Stabilire se f è semplice.

Svolgimento

(a) Matrice di f nella base $(1, x, x^2, x^3)$

Indichiamo $e_0 = 1,\ e_1 = x,\ e_2 = x^2,\ e_3 = x^3$ i vettori della base standard o canonica. Calcoliamo le immagini dei vettori della base:

$$\begin{aligned} f(e_0) &= f(1) = 1 - x^3 \to (1, 0, 0, -1), \\ f(e_1) &= f(x) = x \to (0, 1, 0, 0), \\ f(e_2) &= f(x^2) = 0 \to (0, 0, 0, 0), \\ f(e_3) &= f(x^3) = 0 \to (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Le colonne della matrice associata sono le coordinate di $f(e_i)$ nella base fissata. Dunque

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{con base } \mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3).$$

(b) Dimensione e base di $\mathrm{Im}(f)$

Essendo $\mathrm{Im}(f)$ generato da $\{\, f(1), f(x), f(x^2), f(x^3)\,\} = \{\, 1 - x^3,\ x \,\}$, otteniamo

$$\dim \mathrm{Im}(f) = 2, \qquad \text{una base è } [\, 1 - x^3,\ x \,].$$

L'indipendenza lineare di $1 - x^3$ e x è immediata perché coinvolgono monomi distinti $1, x, x^3$.

(c) Verifica se $p(x) = -3 + 2x + 3x^3$ è autovettore

Sia $g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ con $a = -3,\ b = 2,\ c = 0,\ d = 3.$ Allora

$f(g(x)) = a + bx - a\,x^3 = (-3) + 2x - (-3)x^3 = -3 + 2x + 3x^3 = p(x) = 1g(x) = \lambda g(x).$

Quindi $g(x)$ è autovettore con autovalore $\lambda = 1$.

(d) Autovalori e molteplicità

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $M(f)$:

$$p(\lambda) = \det\big(M(f) - \lambda I\big) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2\,\lambda^2.$$

Dunque gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 1 \ \text{ con molteplicità algebrica 2,} \qquad \lambda_0 = 0 \ \text{ con molteplicità algebrica 2.}$$

Calcolando gli autospazi si ottiene:
- V_{λ_1} con base $\{\,1 - x^3,\ x\,\}, \Rightarrow\ \dim E_1 = 2,$
- $V_{\lambda_0} = \{a + bx + cx^2 + dx^3 :\ a = 0,\ b = 0\}$ con base $\{\,x^2,\ x^3\,\}, \Rightarrow\ \dim E_0 = 2.$

Quindi le molteplicità geometriche coincidono con quelle algebriche: $m_g(1) = 2$ e $m_g(0) = 2$.

(e) Semplicità

Considerato che le molteplicità geometriche coincidono con quelle algebriche f è *semplice* (e $M(f)$ diagonalizzabile).

Esercizio

Sia $R_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x, di grado minore o uguale a 2. Si consideri l'endomorfismo f di $R_2[x]$ definito da:

$$f(a + bx + cx^2) = a - cx^2$$

1. Determinare una base per il nucleo di f.
2. Determinare una base per l'immagine di f.
3. L'endomorfismo f è un isomorfismo? Giustificare la risposta.
4. Calcolare tutti gli autovalori di f e le loro molteplicità algebriche e geometriche.
5. Stabilire se f è semplice.

Svolgimento

Per risolvere l'esercizio, rappresentiamo l'endomorfismo f tramite una matrice associata rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ per $R_2[x]$.

Calcolo delle immagini degli elementi della base

Applichiamo l'endomorfismo f a ogni elemento della base $\mathcal{B}$:

- $f(1) = f(1 + 0x + 0x^2) = 1 - 0x^2 = 1$
- $f(x) = f(0 + 1x + 0x^2) = 0 - 0x^2 = 0$
- $f(x^2) = f(0 + 0x + 1x^2) = 0 - 1x^2 = -x^2$

Ora esprimiamo queste immagini come combinazioni lineari degli elementi della base $\mathcal{B}$:

- $f(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $f(x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $f(x^2) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x - 1 \cdot x^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

  La matrice associata all'endomorfismo f rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcolo del nucleo $Ker(f)$

Il nucleo di f è l'insieme dei polinomi $p(x) = a + bx + cx^2$ tali che $f(p(x)) = 0$. Questo corrisponde alla risoluzione del sistema omogeneo $Av = 0$, dove $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo sistema di equazioni è:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -c &= 0 \end{aligned}$$

Da questo sistema si deduce che $a = 0$ e $c = 0$. La variabile b è libera. Quindi, i polinomi nel nucleo sono della forma $p(x) = 0 + bx + 0x^2 = bx$. Possiamo scrivere questo polinomio come combinazione lineare di x: $b(x)$. Il vettore che genera il nucleo è $\{x\}$. Poiché è un singolo vettore non nullo, si ha che è linearmente indipendente. Una base per $Ker(f)$ è $\mathcal{B}_{Ker} = [x]$. La dimensione del nucleo è $\dim(Ker(f)) = 1$.

2. Calcolo dell'immagine $Im(f)$

L'immagine di f è lo spazio generato dai vettori colonna della matrice A:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Considerando solo i vettori colonna non nulli, l'immagine nerata da:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Questi due vettori sono linearmente indipendenti. Convertendoli in polinomi, otteniamo una base per l'immagine.

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ corrisponde al polinomio 1.
- Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ corrisponde al polinomio $-x^2$.

Una base per $Im(f)$ $\mathrm{B}_{Im} = [1, -x^2]$. La dimensione dell'immagine è $\dim(Im(f)) = 2$.

3. L'endomorfismo f è un isomorfismo?

Un endomorfismo è un isomorfismo se e solo se è sia iniettivo che suriettivo.

- Un endomorfismo è **iniettivo** se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo, cioè $Ker(f) = \{0\}$. Nel nostro caso, $\dim(Ker(f)) = 1 \neq 0$, quindi f **non è iniettivo**.
- Un endomorfismo è **suriettivo** se e solo se la sua immagine coincide con l'intero spazio vettoriale, cioè $Im(f) = R_2[x]$. Nel nostro caso, $\dim(Im(f)) = 2 \neq \dim(R_2[x]) = 3$, quindi f **non è suriettivo**.

Poiché f non è né iniettivo né suriettivo, f non è un isomorfismo.

4. Autovalori e loro molteplicità

Per trovare gli autovalori, calcoliamo il **polinomio caratteristico** $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dove I è la matrice identità di ordine 3.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda)(\lambda+1)$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1$$

- Per $\lambda_1 = 1$: La **molteplicità algebrica** $m_a(1) = 1$.
- Per $\lambda_2 = 0$: La **molteplicità algebrica** $m_a(0) = 1$.
- Per $\lambda_3 = -1$: La **molteplicità algebrica** $m_a(-1) = 1$.

Per ogni autovalore, la **molteplicità geometrica** $m_g(\lambda)$ è la dimensione dell'autospazio associato, che si calcola con la formula $m_g(\lambda) = \dim(V_\lambda) = \dim(R^3) - \mathrm{rank}(A - \lambda I)$. Poiché per tutti gli autovalori $m_a(\lambda) = 1$, la relazione $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ implica che anche $m_g(\lambda) = 1$.

- Per $\lambda_1 = 1$: $m_g(1) = 1$.
- Per $\lambda_2 = 0$: $m_g(0) = 1$.
- Per $\lambda_3 = -1$: $m_g(-1) = 1$.

5. Semplicità di f

Un endomorfismo è semplice se e solo se due condizioni sono soddisfatte:

- Il polinomio caratteristico si scompone completamente in fattori lineari (il che è vero, dato che abbiamo trovato 3 autovalori reali).
- Per ogni autovalore λ, la sua molteplicità algebrica e geometrica coincidono, cioè $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$.

Nel nostro caso, abbiamo:

- Per $\lambda_1 = 1$: $m_a(1) = 1$ e $m_g(1) = 1$.
- Per $\lambda_2 = 0$: $m_a(0) = 1$ e $m_g(0) = 1$.
- Per $\lambda_3 = -1$: $m_a(-1) = 1$ e $m_g(-1) = 1$.

Poichè $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ per tutti gli autovalori, l'endomorfismo f è semplice ($M(f)$ è diagonalizzabile).

Esercizio

Sia $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ dove $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $f(x,y,z,t) = (y,x,z,t)$.

1. Scrivere la matrice $M(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio.
2. Trovare una base dell'autospazio relativo all'autovalore -1.
3. Dimostrare o confutare: f è un endomorfismo semplice.
4. Scrivere tutti gli elementi dell'insieme $I = \{v \in \mathbb{R}^4 : f(v) = (1,2,3,4)\}$.
5. Data la base di $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ dove $v_1 = (0,0,0,2)$, $v_2 = (1,0,0,2)$, $v_3 = (-1,-1,0,0)$, $v_4 = (0,0,1,-2)$, calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia nel dominio che nel codominio.

Suggerimenti per lo svolgimento

1. Calcolo della matrice $M(f)$

Per calcolare la matrice $M(f)$, applichiamo l'endomorfismo f a ciascun vettore della base canonica $\mathcal{E}$ e scriviamo i vettori risultanti come colonne della matrice.

- $f(e_1) = f(1,0,0,0) = (0,1,0,0)$
- $f(e_2) = f(0,1,0,0) = (1,0,0,0)$
- $f(e_3) = f(0,0,1,0) = (0,0,1,0)$
- $f(e_4) = f(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$

La matrice associata è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Base dell'autospazio relativo a $\lambda = -1$

Per trovare l'autospazio V_{-1}, risolviamo il sistema omogeneo $(M(f) - \lambda I)v = 0$ con $\lambda = -1$. La matrice $(M(f) - (-1)I)$ è:

$$\begin{pmatrix} 0+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema per un vettore $v = (x,y,z,t)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \\ 2z &= 0 \\ 2t &= 0 \end{aligned}$$

Da questo sistema, ricaviamo che $x = -y$, $z = 0$, e $t = 0$. I vettori dell'autospazio sono della forma $(y, -y, 0, 0)$, che possono essere scritti come $y(1,-1,0,0)$. Una base per l'autospazio V_{-1} è l'insieme $[(1,-1,0,0)]$.

3. Semplicità di f

Per verificare se l'endomorfismo f è semplice si confrontano le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori. Il polinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = \det(M(f) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Il determinante si calcola ottenendo:

$$p(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^3.$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica $m_a(-1) = 1$ e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica $m_a(1) = 3$. Abbiamo già calcolato che la molteplicità geometrica per $\lambda_1 = -1$ è $m_g(-1) = \dim(V_{-1}) = 1$. Per $\lambda_2 = 1$, la molteplicità geometrica è $m_g(1) = \dim(\mathbb{R}^4) - \text{rank}(A - I)$.

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di questa matrice è 1. Quindi, $m_g(1) = 4 - 1 = 3$. Poiché per entrambi gli autovalori si ha che $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, l'endomorfismo f è semplice.

4. Elementi dell'insieme I

L'insieme I è la soluzione dell'equazione vettoriale $f(x, y, z, t) = (1, 2, 3, 4)$. Per definizione di f, abbiamo:

$$f(x, y, z, t) = (y, x, z, t)$$

Quindi, eguagliando le componenti:

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 2 \\ z &= 3 \\ t &= 4 \end{aligned}$$

L'unica soluzione è il vettore $(2, 1, 3, 4)$. L'insieme I contiene un solo elemento: $I = \{(2, 1, 3, 4)\}$.

5. Calcolo della matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$

Per calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$, dobbiamo trovare le immagini dei vettori della base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ e scriverle come combinazioni lineari dei vettori di $\mathcal{B}$. Siano $v_1 = (0, 0, 0, 2)$, $v_2 = (1, 0, 0, 2)$, $v_3 = (-1, -1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 1, -2)$.

- $f(v_1) = f(0, 0, 0, 2) = (0, 0, 0, 2) = v_1$. Quindi, le componenti sono $(1, 0, 0, 0)$.
- $f(v_2) = f(1, 0, 0, 2) = (0, 1, 0, 2)$. Cerchiamo a, b, c, d tali che $(0, 1, 0, 2) = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$.

  $$\begin{aligned} a(0, 0, 0, 2) + b(1, 0, 0, 2) + c(-1, -1, 0, 0) + d(0, 0, 1, -2) &= (0, 1, 0, 2) \\ b - c &= 0 \Rightarrow b = c \\ -c &= 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow b = -1 \\ d &= 0 \\ 2a + 2b - 2d &= 2 \Rightarrow 2a + 2(-1) - 2(0) = 2 \Rightarrow 2a - 2 = 2 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

  Quindi, $f(v_2) = 2v_1 - v_2 - v_3$. Le componenti sono $(2, -1, -1, 0)$.
- $f(v_3) = f(-1, -1, 0, 0) = (-1, -1, 0, 0) = v_3$. Quindi, le componenti sono $(0, 0, 1, 0)$.

- $f(v_4) = f(0,0,1,-2) = (0,0,1,-2) = v_4$. Quindi, le componenti sono $(0,0,0,1)$.

La matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ ha come colonne le componenti trovate:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$