TEST

1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice. Se esiste una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo in n incognite $AX = 0$, quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) $\text{rk}(A) < n$.
   (b) 0 non è autovalore di A.
   (c) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
   (d) $\text{rk}(A) = n$.

2. Siano $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ i versori degli assi coordinati di $\mathbb{R}^3$. Si considerino i vettori $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ e $\vec{v}_t = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + t^2\vec{k}$, con $t \in \mathbb{R}$ parametro reale.

   Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}_t$ formano un angolo di ampiezza $\pi/4$ radianti.
   (b) Esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{u}$ e $\vec{v}_t$ siano perpendicolari.
   (c) Nessuna delle altre affermazioni è vera.
   (d) L'angolo fra $\vec{u}$ e $\vec{v}_t$ è ottuso per ogni $t \in \mathbb{R}$.

3. Sia data la retta $r : 2x - y - z = 2x + y + 2z - 1 = 0$.

   Trovare l'affermazione corretta.

   (a) r passa per l'origine.
   (b) r è parallela alla retta di equazioni parametriche $(10 - t, 1 - 6t, 4t)$.
   (c) r è contenuta nel piano $4x + z - 2 = 0$.
   (d) r è contenuta nel piano yz.

4. Si considerino le rette $s : \; x - 1 - y - z = y + z = 0$ ed $r : \; 1 - z = y + z = 0$.

   Quale dei seguenti numeri è la distanza tra le rette r e s?

   (a) 0.
   (b) 3.
   (c) $\sqrt{2}$.
   (d) $\sqrt{3}$.

5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $h \in \mathbb{R}$ è un parametro reale. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) A ha 3 autovalori distinti per ogni $h \in \mathbb{R}$.
(b) Se $h = 1$, la matrice A non è diagonalizzabile.
(c) A è diagonalizzabile solo se $h = 0$.
(d) Se $h = 4$, A è diagonalizzabile.

6. Sia A una matrice quadrata non invertibile. Il determinante di $A^3 + 3A$ vale:

(a) 0.
(b) 2.
(c) 3.
(d) -2.

7. Cosa si può affermare riguardo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$?

(a) $\det(A^3) = 8$.
(b) $A^2 = A^3$.
(c) $\lambda = 4$ non è un autovalore di A^2.
(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A.

8. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_\alpha$ rappresentata dall'equazione

$$\alpha x^2 + 2\alpha xy + (1-\alpha)y^2 + 2\alpha x + (2\alpha - 4)y + \alpha + 3 = 0.$$

Trovare l'affermazione corretta.

(a) Esistono infiniti valori di α per cui l'equazione rappresenta una conica degenere.
(b) Esistono esattamente due valori di α per cui l'equazione rappresenta una ellisse.
(c) Esiste un valore di α per cui l'equazione rappresenta una parabola.
(d) Non esiste nessun valore di α per cui l'equazione rappresenta un'iperbole.

9. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da: $f(x, y, z) = (x + y + z, 0, 0)$.
Trovare l'affermazione corretta.

   (a) f è suriettivo.
   (b) $(1, 1, 1)$ è un autovettore di f.
   (c) f non è iniettivo.
   (d) $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$.

10. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) Il sistema ammette ∞^2 soluzioni.
   (b) Il sistema ammette ∞^1 soluzioni.
   (c) Il sistema ammette un'unica soluzione.
   (d) Il sistema non ha soluzioni.

11. Si considerino la retta $\ell : x + y + z = x = 0$ e il piano $\pi : x + y + z = 3$.
Trovare l'affermazione corretta.

   (a) $\ell \cap \pi \neq \emptyset$.
   (b) $\ell \subset \pi$.
   (c) $\ell || \pi$.
   (d) $\ell \perp \pi$.